MODUL

KALKULUS

OLEH:
Gusti Ayu Dessy Sugiharni, S.Pd., M.Pd.

PROGRAM STUDI SISTEM INFORMASI
INSTITUT TEKNOLOGI DAN BISNIS STIKOM BALI
2021

FUNGSI

- **Definisi Fungsi** : Aturan pemasangan elemen – elemen di himpunan A yang disebut domain harus tepat 1 elemen di himpunan B (ko-domain).
- Himpunan semua elemen di B yang mempunyai pasangan di A disebut *Range.*
- Aturan ditulis f dan pemasangan ditunjukkan dengan " → ", sehingga

$$f : A \to B \; ; \; D_f = A \; ; \; CD_f = B \; ; \; R_f = \{\dots\}$$

- **Daerah Definisi** (daerah asal/wilayah/domain) dari suatu fungsi $f(x)$, dinotasikan D_f adalah himpunan semua bilangan real yang menyebabkan aturan fungsi berlaku/terdefinisi. Syarat D_f : tidak melibatkan pembagian dengan 0 dan tidak ada akar bilangan negative. Domain (x).
- Jika tidak dinyatakan secara jelas, maka domain suatu fungsi adalah himpunan bilangan real.
- **Notasi fungsi**: $y = f(x)$ dengan: x elemen A, $f(x)$ aturan pemadanannya, dan y adalah elemen B yang merupakan pasangan dari x.
- **Daerah Nilai** (daerah hasil/jelajah/range) dari suatu fungsi $f(x)$, dinotasikan $R_f = \{ y \mid y = f(x), x \in D_f \}$ (berisi semua pasangan dari x). Range (y).

EXERCISE 1.3

Find the domain and range of each function !

1. $f(x) = 1 + x^2$

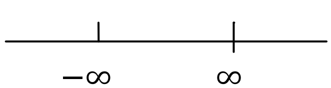
   Kita masukkan x= – 1, $f(-1) = 1 + (-1)^2 \to f(-1) = 2$

   x=0, $f(0) = 1 + 0^2 = 1$

   x=1, $f(1) = 1 + 1^2 = 2$

   sehingga, x merupakan bilangan real

   $domain\ (x) = D_f = (-\infty, \infty)$



   Karena hasil dari $f(x) = 1 + x^2$ adalah bilangan bulat positif, meskipun kita masukkan x= – 1, maka :

$$Range\ (y) = R_f = [1, \infty)$$

2. $g(z) = \sqrt{4 - z^2}$

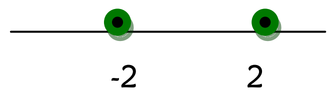
   Kita coba masukkan z= – 1, $g(z) = \sqrt{4 - (-1)^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$

   z=0, $g(z) = \sqrt{4 - 0^2} = 2$

   z=1, $g(z) = \sqrt{4 - (1)^2} = \sqrt{3}$

   karena syarat D_f tidak boleh akar negative, dan jika kita memasukkan z= – 3

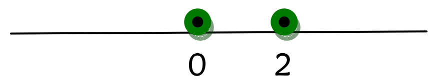
   maka hasilnya akan akar negative. Sehingga:



   $D_f = [-2,2]$

   Hasil fungsi ini adalah bilangan bulat positif, sehingga :

$R_f = [0,2]$



Kombinasi Fungsi

1. $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$
2. $(fg)(x) = f(x).g(x)$
3. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad ; g(x) \neq 0$
4. $(c.f)(x) = c.f(x)\ ,\ c\ adalah\ konstanta$
5. $f^n(x) = f(x)f(x) \ldots f(x) \quad ; \quad D_{fn} = D_f$
6. Domain dari kombinasi fungsi berupa irisan kedua domain yaitu $D_f \cap D_g$

Exercise 1.5

Find the domains of $f, g, f + g, fg, and\ \frac{f}{g}$!

1. $f(x) = \sqrt{x + 1} \quad , \quad g(x) = \sqrt{x - 1}$

$$D_f = \{x / x + 1 \geq 0\} = \{x \geq -1\} = [-1, \infty)$$

$$D_g = \{x - 1 \geq 0\} = \{x \geq 1\} = [1, \infty)$$

$$D_f \cap D_g = \{-1 \leq x \leq 1\} = [-1,1]$$

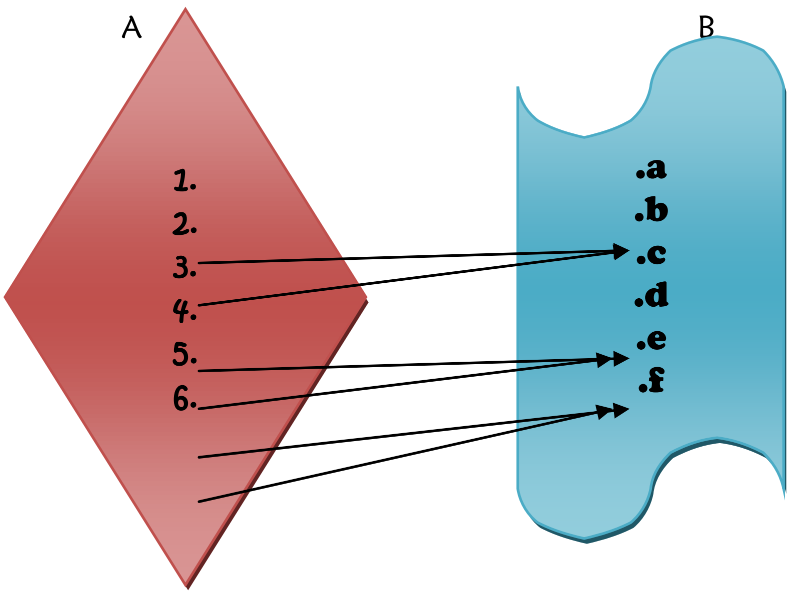
$f(x) + g(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$

$D_{f+g} = D_f \cap D_g = [-1, \infty) \cap [1, \infty) = [-1,1]$

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$

$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g \cap \{g(x) \neq 0\} = [-1, \infty) \cap [1, \infty) \cap \{x \neq 1\} = [-1,1)$

PEta dan Prapeta



Pada fungsi di atas,kita dapat mengetahui bahwa A={1,2,3,4,5,6} dan B={a,b,c,d,e,f}. sehingga $D_f = \{1,2,3,4,5,6\}$ yang merupakan Prapeta dari B.

$R_f = \{a, c, d\}$ dinamakan Peta dari A

- Peta dari A oleh f adalah $f(A) = \{y \in \frac{R_f}{y} = f(x), x \in A\}$
- Prapeta dari B oleh f adalah $f^{-1}(B) = \{x \in D_f / f(x) \in B$

Fungsi Komposisi

Perhatikan dua buah fungsi $f(x) = x + 1$ dan $g(x) = \sqrt{5x}$.

Dibentuk fungsi baru $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big), sehingga\ g(x+1) = \sqrt{5(x+1)}$.

Fungsi demikian disebut sebagai fungsi komposisi dari f dan g.

Menentukan Domain dan Range adalah

$$D_{g\circ f} = f^{-1}(A)\ dan\ R_{g\circ f} = g(A)$$

$dimana\ A = R_f \cap D_g$

SOAL

1. $f(x) = 1 + x^2\ \ dan\ \ g(x) = \sqrt{1-x}\,.Tentukan\ f \circ g!$

$$f \circ g = f\big(\sqrt{1-x}\big) = 1 + (\sqrt{1-x})^2 = 1 + 1 - x = -x$$

EXERCISE 1.5

6. $if\ f(x) = x + 5\ and\ g(x) = x^2 - 3.\quad Find\ the\ following$
   a. $f\big(g(0)\big)$
   b. $f(f(-5))$
   c. $g\big(f(x)\big)$

Jawab :

a. $f\big(g(0)\big) = f(-3) = -3 + 5 = 2$
b. $f\big(f(-5)\big) = f(-5+5) = f(0) = 0 + 5 = 5$
c. $g\big(f(x)\big) = g(x+5) = (x+5)^2 - 3 = \ x^2 + 10x + 25 - 3 = x^2 + 10x + 22$

LIMIT

❖ **Definisi Limit** : Misalkan $f(x)$ terdefinisi pada $I = (a, b)$, kecuali mungkin di $c \in I$. Limit dari $f(x)$ untuk x mendekati c disebut L, dinotasikan $\lim_{x \to c} f(x) = L$ artinya untuk setiap _ > 0, dapat dicari $\delta > 0$ sehingga $|x - c| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

❖ **Sifat – sifat Limit** : Misalkan f dan g dua buah fungsi dan k ϵ R

1. $\lim_{x \to c} k = k$

2. $\lim_{x \to c} x = c$

3. $\lim_{x \to c} (kf)(x) = k \lim_{x \to c} f(x)$

4. $\lim_{x \to c} (f + g)(x) = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$

5. $\lim_{x \to c} (f - g)(x) = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x)$

6. $\lim_{x \to c} (fg)(x) = \lim_{x \to c} f(x) . \lim_{x \to c} g(x)$

7. $\lim_{x \to c} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x \to c} \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}$

8. $\lim_{x \to c} f^n(x) = (\lim_{x \to c} f(x))^n, \quad n \in \mathbb{N}$

9. $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f}(x) = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)}$

10. $bila\ p(x) polinom\ maka\ \lim_{x \to c} f(x) \geq 0\ untuk\ n\ genap$

EXERCISE 2.1

Find The Limits by Substitution !!

21. $\lim_{x\to 2} 2x = 2.2 = 4$

22. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{2^2-4}{2-2} = \frac{0}{0}$ $, merupakan\ bentuk\ tak\ tentu.$

Oleh karena itu, kita memakai penyelesaian dengan uraian aljabar, karena terdapat bentuk aljabar kuadrat di sana . sehingga,

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)} = \lim_{x\to 2} x+2 = 2+2 = 4$$

25. $\lim_{x\to -1} 3x(2x-1) = 3(-1)(2(-1)-1) = (-3)(-3) = 9$

26. $\lim_{x\to 2} \frac{3x^2}{2x-1} = \frac{3.(2)^2}{2.2-1} = \frac{12}{3} = 4$

Exercise 2.2

Find The Limits !!

1. $\lim_{x\to -7}(2x+5) = \lim_{x\to -7} 2x + \lim_{x\to -7} 5 = -14+5 = -9$

2. $\lim_{x\to 2}(-x^2+5x-2) = \lim_{x\to 2}(-x)^2 + \lim_{x\to 2} 5x - \lim_{x\to 2} 2 = 4+10-2 = 12$

3. $\lim_{x\to -4}(x+3)^{1984} = (-4+3)^{1984} = (-1)^{1984} = 1$

13. $\lim_{x\to -3}(5-x)^{4/3} = \left[[5-(-3)]^{4/3}\right] = (8)^{4/3} = 8^{1/3}.8^1 = 2.8 = 16$

18. $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{5h+4}-2}{h} = \frac{0}{0}$ $, bentuk\ tak\ tentu$

Karena bentuknya berakar, penyelesaian yang kita lakukan adalah dengan menggunakan perkalian dengan sekawan. Maka :

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{5h+4}-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{5h+4}-2}{h}.\frac{\sqrt{5h+4}+2}{\sqrt{5h+4}+2}=\lim_{h\to 0}\frac{(5h+4)-4}{h(\sqrt{5h+4}+2)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{5}{\sqrt{5h+4}+2}=\frac{5}{\sqrt{4}+2}=\frac{5}{4}$$

24. $\lim_{t\to -1}\frac{t^2+3t+2}{t^2-t-2}=\frac{0}{0}$; *bentuk tak tentu*. kita bisa menyelesaikannya dengan menggunakan penyelesaian bentuk aljabar, yakni :

$$\lim_{t\to -1}\frac{t^2+3t+2}{t^2-t-2}=\lim_{t\to -1}\frac{(t+2)(t+1)}{(t-2)(t+1)}=\lim_{t\to -1}\frac{(t+2)}{(t-2)}=\frac{-1+2}{-1-2}=-\frac{1}{3}$$

52. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{24}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}-\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{24}=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$

55. if $\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-5}{x-2}=1, find\ \lim_{x\to 4}f(x)$

Jawab : 1= $\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-5}{x-2}$

1= $\frac{\lim_{x\to 4}f(x)-\lim_{x\to 4}5}{\lim_{x\to 4}x-\lim_{x\to 4}2}$

1= $\frac{\lim_{x\to 4}f(x)-5}{4-2}$

$\lim_{x\to 4}f(x)-5$ =2(1)

$\lim_{x\to 4}f(x)=2+5=7$

$$jadi, \lim_{x\to 4}f(x)=7$$

<u>Exercise 2.3</u>

<u>Find the Limit!!</u>

31. $\lim_{x\to 3}(3-2x) = 3-2(3) = -3$

15. $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h^2+4h+5}-\sqrt{5}}{h} = \frac{0}{0}$ bentuk tak tentu. Sehingga kita menggunakan penyelesaian dengan sekawan.

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt{h^2+4h+5}-\sqrt{5}}{h}\right)\left(\frac{\sqrt{h^2+4h+5}+\sqrt{5}}{\sqrt{h^2+4h+5}+\sqrt{5}}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(h^2+4h+5)-5}{h\,(\sqrt{h^2+4h+5}+\sqrt{5})} = \lim_{h\to 0}\frac{h(h+4)}{h\,(\sqrt{h^2+4h+5}+\sqrt{5})}$$

$$= \frac{0+4}{\sqrt{5}+\sqrt{5}} = \frac{4}{2\sqrt{5}}$$

- ## Sifat – sifat Limit Fungsi Trigonometri

1. $\lim_{x\to c}\sin x = \sin c$ $\quad dan \quad$ $\lim_{x\to c}\cos x = \cos c$
2. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ $\quad dan \quad$ $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1$
3. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1$ $\quad dan \quad$ $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x} = 1$

SOAL - SOAL :

Hitung Limit – Limit Berikut ini !

22. $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\sqrt{2\theta}}{\sqrt{2\theta}} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ sebagaimana sifat Limit Fungsi Trigonometri

23. $\lim_{y\to 0}\frac{\sin 3y}{4y} = \frac{1}{4}\lim_{y\to 0}\frac{3\sin 3y}{3y} = \frac{3}{4}\lim_{y\to 0}\frac{\sin 3y}{3y} = \frac{3}{4}\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{3}{4}$

26. $\lim_{t\to 0}\frac{2t}{\tan t} = 2\lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{\sin t}{\cos t}} = 2\lim_{t\to 0}\frac{t\cos t}{\sin t} = 2\left(\lim_{t\to 0}\cos t\right)\left(\frac{1}{\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}}\right)$

$= 2.1.1 = 2$

27. $\lim_{x\to 0}\frac{x\csc 2x}{\cos 5x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin 2x}\cdot\frac{1}{\cos 5x}\right) = \left(\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 5x}\right) = \frac{1}{2}\,.\,1.1 = \frac{1}{2}$

28. $\lim_{x\to 0} 6x^2(\cot x)(\csc 2x) = \lim_{x\to 0}\frac{6x^2\cos x}{\sin x\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\left(3\cos x\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\right)$

$= 3.1.1 = 3$

29. $\lim_{x\to 0}\frac{x+x\cos x}{\sin x\cos x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x\cos x} + \frac{x\cos x}{\sin x\cos x}\right)$

$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right) + \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right) = (1.1) + 1 = 2$

34. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 4x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{\sin 4x}\cdot\frac{4x}{5x}\cdot\frac{5}{4}\right) = \frac{5}{4}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{4x}{\sin 4x}\right) = \frac{5}{4}.1.1 = \frac{5}{4}$

35. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 8x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{\cos 3x}\cdot\frac{1}{\sin 8x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos 3x}\cdot\frac{\sin 3x}{\sin 8x}\cdot\frac{8x}{3x}\cdot\frac{3}{8}\right)$

$= \frac{3}{8}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos 3x}\right)\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)\left(\frac{8x}{\sin 8x}\right)$

$= \frac{3}{8}.1.1.1 = \frac{3}{8}$

- ❖ **Limit Sepihak**
  - Definisi limit kanan : Misalkan f(x) terdefinisi pada I = (a, b), kecuali mungkin di c ∈ I. Limit dari f(x) untuk x mendekati c dari kanan disebut L, dinotasikan lim x→c+ f(x) = L artinya untuk setiap ε > 0, dapat dicari δ > 0 sehingga x − c < δ =⇒ |f(x) − L| < ε
  - Sifat – sifat:
    1. $\lim_{x\to c} f(x) = L \to \lim_{x\to c^-} f(x) = L \quad dan \quad \lim_{x\to c^+} f(x) = L$
    2. $\lim_{x\to c} f(x) = L \to \lim_{x\to c}|f(x)| = |L|$
    3. $\lim_{x\to c}(f)(x) = 0 \to \lim_{x\to c}|f(x)| = 0$

SOAL

Hitung limit – limit berikut ini !

a. $\lim_{x\to 2}|x^2 - 1| = |2^2 - 1| = |3| = 3$

b. $\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|}$

Karena berbentuk pecahan, syarat penyebut adalah ≠ 0. Sehingga x≠0.

Misal $f(x) = \frac{x}{|x|}$

Untuk x<0, $|x|$=– 1 $\to \frac{x}{-x} = -1$

$$untuk\ x > 0, |x| = x \ \to \ \frac{x}{x} = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1 \ \ ; \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$

Karena limit kiri dan limit kanannya tidak sama, mengakibatkan limitnya tidak ada.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = tidak\ ada$$

❖ Limit di titik Tak Hingga

Bagian ini mengamati perilaku fungsi f(x) bila x $\frac{membesar}{mengecil}$ tanpa batas.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \; jika\; dan\; hanya\; jika\; \forall\epsilon > 0, \exists M, x > M \;\rightarrow |f(x) - L| < \in$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \; jika\; dan\; hanya\; jika\; \forall \in > 0, \exists M, x < M \;\rightarrow |f(x) - L| < \in$$

$$untuk\; k\; \in \mathbb{N}\; dan\; merupakan\; pangkat\; terbesar, maka:$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^k} = 0 \quad dan \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^k} = 0$$

SOAL - SOAL !!

50. $\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x^2+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}} = \frac{0}{1+0} = \frac{0}{1} = 0$

51. $\lim_{x\to\infty} \frac{7x^3}{x^3+3x^2+6x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{7x^3}{x^3}}{1-\frac{3x^2}{x^3}+\frac{6x}{x^3}} = \frac{7}{1-0-0} = 7$

53. $\lim_{x\to\infty} \frac{10x^5+x^4+31}{x^6} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{10}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{31}{x^6}}{1} = 0$

54. $\lim_{x\to\infty} \frac{9x^4+x}{2x^4+5x^2-x+6} = \lim_{x\to\infty} \frac{9+\frac{1}{x^3}}{2+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\frac{6}{4}} = \frac{9}{2}$

57. $\lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}+x^{-1}}{3x-7} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x^{1/2}}+\frac{1}{x^2}}{3-\frac{7}{x}} = 0$

❖ Asimptot DAtar

$garis\ y$

$= L\ disebut\ asimptot\ datar\ dari\ fungsi\ f(x) jika\ memnuhi\ salah\ satu\ dari\ \lim_{n \to -\infty} f(x)$

$= L\ atau\ \lim_{n \to \infty} f(x) = L$

Materi ini merupakan materi pengayaan.

❖ Limit Tak Hingga

BAgian ini mengamati perilaku fungsi f(x) dimana nilai f(x) membesar / mengecil tanpa batas.

$\lim_{x \to c^+} f(x) = \infty\ jika\ dan\ hanya\ jika\ \forall M > 0, \exists \delta > 0, \ni 0 < x - c < \delta \to f(x) > M$

- $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$, $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
- $\lim_{x \to a^-} \frac{1}{x-a} = \lim_{u \to 0^-} \frac{1}{u} = -\infty$

SOAL!!

Hitung Limit- limit berikut ini !

2. $\lim_{x \to 0^+} \frac{12}{7x} = \frac{12}{7} \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{12}{7} . \infty = \infty$

4. $\lim_{x \to -3^+} \frac{1}{x-3} = \lim_{u \to 0^-} \frac{1}{u} = 1. \lim_{u \to 0^-} \frac{1}{u} = 1. -\infty = -\infty$

7. $\lim_{x \to 7^+} \frac{4}{x-7} = 4\ \lim_{x \to 7^+} \frac{1}{x-7} = 4 \lim_{u \to 0^+} \frac{1}{u} = 4. \infty = \infty$

17.a. $\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x+2} \lim_{u \to 0^+} \frac{1}{u} = \frac{1}{x+2} . \infty = \infty$

b. $\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x+2} \lim_{u \to 0^-} \frac{1}{u} = \frac{1}{x+2} . (-\infty) = -\infty$

- **Kekontinuan di Satu Titik**

$$Misalkan\ f(x) terdefinisi\ pada\ interval\ buka\ I\ dan\ c \in I. fungsi\ f\ diebut\ kontinu$$

$$di\ titik\ c\ jika\ f(c) = \lim_{x \to c} f(x) \to f(c) = \lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x)$$

Soal!

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 64}{x - 8}, & x \neq 8 \\ \quad 5 \quad, & x = 2 \end{cases}$$

Periksa kekontinuan f di titik x=8.
Jawab :

$$\lim_{x \to 8} f(x) = \lim_{x \to 8} \frac{x^2 - 64}{x - 8} = \lim_{x \to 8} \frac{(x-8)(x+8)}{(x-8)} = \lim_{x \to 8} (x+8) = 16$$

$$f(2) = 5$$

$$\lim_{x \to 8} f(x) = 16 \neq 5 = f(2)$$

Jadi, f(x) tidak kontinu di x=2

TURUNAN

📖 Kemiringan garis singgung di titik P = (c,f(c)) didefinisikan sebagai :

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Soal :

Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = 4x^2$ $di\ titik\ x = 2.$

Jawab :

$$y = f(x) = 4x^2$$

$$x = 2 \to y = 16 \qquad P(2,16)$$

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4(2+h)^2 - 4.4}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4(4 + 4h + h^2) - 16}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{16 + 16h + 4h^2 - 16}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (16 + 4h) = 16 + 4.0 = 16$$

$$\therefore m = 16$$

Persamaan garis singgung di x=2 adalah y – 16= 16 (x – 2)

y=16x – 16

📖 **Definisi :** misal y=f(x) fungsi pada dimana D_f dan x ∈ D_f

Turunan f di titik x ditulis f'(x) adalah :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Asalkan nilai limitnya ada. Jika nilai turunan f di x=c ada, maka diketahui f diferensiabel di titik c. jika f diferensiabel pada semua titik dalam domain D, maka f diferensiabel adalah pada D. jika f diferensiabel pada R, maka f dikatakan diferensiabel dimana – mana.

📖 **Notasi Leibniz:**

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

Soal !

1. $f(x) = 6x^2 + 2x + 7$

Tunjukkan bahwa $f'(x) = 12x + 2$.

JAwab :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(6(x+h)^2 + 2(x+h) + 7) - (6x^2 + 2x + 7)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(6(x^2 + 2xh + h^2) + 2x + 2h + 7) - 6x^2 + 2x - 7}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{6x^2 + 12xh + 6h^2 + 2x + 2h + 7 - 6x^2 + 2x - 7}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} (12x + 6h + 2) = 12x + 2$$

2. Tentukan turunan dari fungsi berikut !

$$f(x) = 2x^3$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2(x+h)^3 - 2x^3}{h}$$

$= \lim_{h \to 0} \frac{2(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-2x^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{6x^2h+6xh^2+2h^3}{h} = \lim_{h \to 0}(6x^2 + 6xh + 2x^2)$

$= 6x^2$

🕮 Sifat – Sifat Turunan:

1. $f(x) = k \to f^{'}(x) = 0$
2. $f(x) = x \to f^{'}(x) = 1$
3. $f(x) = x^n \to f^{'}(x) = nx^{n-1}$
4. $y = kf(x) \to y^{'} = kf^{'}(x)$
5. $\frac{d}{dx} = \left(f(x) \pm g(x)\right) = \frac{d}{dx} f(x) \pm \frac{d}{dx} g(x)$
6. $\frac{d}{dx}\left(f(x).g(x)\right) = \frac{d}{dx} f(x).g(x) + f(x)\frac{dy}{dx} g(x) = f^{'}(x).g(x) + f(x).g^{'}(x)$

   $$atau\ f^{'}(x) = v\ du + u\ dv$$
7. $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f^{'}(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}\ atau\ f^{'}(x) = \frac{u}{v} = \frac{v\ du - u\ dv}{v^2}$

<u>**Soal**</u>

Tentukan turunan dari fungsi – fungsi berikut !

1. $f(x) = 67 \to f^{'}(x) = 0$
2. $f(x) = 5x \to f^{'}(x) = 5$
3. $f(x) = 4x^2 \to f^{'}(x) = 8x$
4. $f(x) = (2x+1)(x^2+3x)$

   Jawab :

   $$Kita\ misalkan\ \ (2x+1) = u\ \ \ dan\ \ (x^2+3x) = v$$

   Sehingga ,

$$f^{'}(x) = v\,du + u\,dv$$

$$f^{'}(x) = 2(x^2+3x) + (2x+1)(2x+3)$$
$$f^{'}(x) = 2x^2+6x+4x^2+8x+3 = \ 6x^2+14x+3$$

5. $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$

   Jawab :

   Kita misalkan (x+1)=u dan x^2=v. Sehingga :

$$f^{'}(x) = \frac{x+1}{x^2} = \frac{u}{v} = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$

$$f^{'}(x) = \frac{x^2 - 2x(x+1)}{x^4} = \frac{x^2-2x^2-2x}{x^4} = \frac{-x^2-2x}{x^4} = \frac{-x-2}{x^3}$$

6. $y = x^{9/4} \rightarrow y^{'} = \frac{9}{4}x^{5/4}$
7. $y = \sqrt[4]{5x} = (5x)^{1/4}; \quad y^{'} = \frac{1}{4}(5x)^{-3/4}.5 = \frac{5^{1/4}}{4x^{3/4}}$
8. $y = (1-6x)^{2/3};\ y^{'} = \frac{2}{3}(1-6x)^{-\frac{1}{3}}(-6) = -4(1-6x)^{-1/3}$
9. $s = \sqrt[7]{t^2} = t^{2/7}; y^{'} = \frac{2}{7}t^{-5/7}$

📖 **Turunan Fungsi Trigonometri:**

1. $f(x) = \sin x \rightarrow f^{'}(x) = \cos x$
2. $f(x) = \cos x \rightarrow f^{'}(x) = -\sin x$
3. $y = x^2 - \sin x \rightarrow y^{'} = 2x - \cos x$
4. $f(x) = x^2 \sin x\,, misal\ x^2 = u\ \ dan\ \sin x = v \rightarrow f^{'}(x) = u.v = v\,du + u\,dv$
5. $d\frac{u}{v} = \frac{vdu - udv}{v^2}$
6. $f(x) = \tan x\ \rightarrow f^{'}(x) = sec^2 x$
7. $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x.\tan x$
8. $f(x) = (\sin x)^n \rightarrow f^{'}(x) = n \sin x^{n-1} \cos x$

Soal !

Tentukan turunan dari fungsi – fungsi berikut.

1. $y = -10x + 3\cos x \rightarrow y' = -10 + 3\frac{d}{dx}(\cos x) = -10 - 3\sin x$
2. $y = 5\sin x \rightarrow y' = 5\cos x$
3. $y = \frac{\cot x}{1+\cot x}$

   Jawab :

$$y' = \frac{u}{v} = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2} = \frac{(1+\cot x)(-cs\,c^2x) - (-csc^2)}{(1+\cot x)^2}$$

$$= \frac{-csc^2x - csc^2x\cot x + csc^2x\cot x}{(1+\cot x)^2} = \frac{-csc^2x}{(1+\cot x)^2}$$

4. $p = \frac{\tan q}{1+\tan q}$ dengan cara yang sama seperti no.3, maka didapat $p' = \frac{sec^2q}{(1+\tan q)^2}$

Aturan Rantai Turunan:

Jika f adalah fungsi dari u, sedangkan u adalah fungsi di x, maka

$$\frac{d}{dx}f(u) = f'(u).\frac{d}{dx}u$$

Soal :

<u>Tentukan turunan dari fungsi berikut !</u>

1. $f(x) = (2x^6 + 4x^2)^5$

   Jawab : $f'(x) = 5(2x^6 + 4x^2)^4.(12x^5 + 8x)$
2. $f(u) = (2x + 1)$

$$f'(u) = (2u+1)^5 = f'(u)\frac{du}{dx}u = 5u^2.2 = 10(2x+1)^4$$

Turunan Fungsi Implisit

Berbentuk f(x,y)=0

y=2x+1 (eksplisit), y-2x-1=0 (implicit)

Soal

1. $x^3 + y^3 = 18xy.\ \ Tentukan\ \frac{dy}{dx}$!

Jawab :

$$x^3 + y^3 = 18xy \ \rightarrow \ 3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 18y + 18x\frac{dy}{dx} \rightarrow (3y^2 - 18x)\frac{dy}{dx} = 18y - 3x^2 \rightarrow\rightarrow \frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{6y - x^2}{y^2 - 6x}$$

2. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $x^2+y^2=16$ di titik (3,4).

   Jawab : P (3,4)

$$m = f'(x)|p = \frac{dy}{dx}\Big| p$$

$$x^2 + y^2 = 16 \ \rightarrow 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x \ \rightarrow \ \frac{-x}{y}$$

$$m = \frac{dy}{dx}\Big| p(3,4)$$

$$= \frac{-x}{y}\Big| (3,4) = \frac{-3}{4}$$

$$\therefore \textit{persamaan garis singgung di titik P adalah } y - 4 = \frac{-3}{4}(x - 3)$$

$$y = \frac{-3}{4}x + \frac{9}{4} + \frac{16}{4}$$

   Dikali 4 sehingga $3x + 4y = 25$

🕮 Turunan kedua dan turunan tingkat tinggi:

Jika y=f(x) fungsi yang diferensiabel dengan fungsi turunan f'(x), maka turunan dari f'(x) ditulis f''(x) disebut turunan kedua dari f. secara sama turunan ke – n dari f(x) ditulis $f^n(x)$ didefenisikan sebagai :

$$f^n(x) = \frac{d}{dx}f^{(n-1)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}f(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

Soal !

Tentukan Turunan pertama dan kedua dari fungsi berikut !

1. $y = -x^2 + 3$

$$y' = -2x \quad ; \ y'' = -2$$

2. $s = 5t^3 - 3t^5$

$$s' = 15t^2 - 15t^4 \quad ; \quad s'' = 30t - 60t^3$$

3. $w = 3z^7 - 7z^3 + 21z^2$

$$w' = 21z^6 - 21z^2 + 42z \quad ; \quad w'' = 126z^5 - 42z + 42$$

4. $y = \frac{4}{3}x^3 - x$

$$y' = 4x^2 - 1 \rightarrow y'' = 8x$$

5. $y = 4 - 2x - x^{-3}$

$$y' = -2 + 3x^{-4} \rightarrow y'' = -12x^{-5}$$

🕮 Turunan sebagai Laju Perubahan

Jika f fungsi dari x, maka nilai dari

$f(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ diintrepasikan sebagai nilai dari perubahan f oleh perubahan x sejauh h. Nilai perubahan sesaat terhadap titik x di x_0 adalah turunan f terhadap x di x_0 yaitu

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

🕮 Jarak, Kecepatan, dan Percepatan

Andaikan suatu objek bergerak sepanjang garis lurus, posisi objek bergantung pada waktu t sehingga s=f(t).

Kecepatan gerak objek pada waktu t ditulis:

$$v(t) \ didefinisikan \ sebagai \ v(t) = \frac{ds}{dt} = s(t)$$

$$percepatan \ adalah \ perubahan \ kecepatan \ dalam \ tiap \ satuan \ waktu$$

Aplikasi Turunan

Nilai ekstrim suatu fungsi :

Definisi adalah f fungsi dengan domain D_f

- f mempunyai nilai minimum mutlak di $c \in D_f$ $jika\ f(x) \geq f(c);\ \forall x \in D_f$
- f mempunyai nilai maksimum mutlak pada $c \in D_f$ $jika\ f(x) \leq f(c); \forall x \in D_f$

minimum mutlak dan maksimum mutlak disebut ekstrim mutlak.

Teorema : $jika\ f\ fungsi\ kontinu\ pada\ [a,b] maka\ f\ mempunyai\ maksimum\ absolut\ m\ dan \min absolut\ m\ di\ dalam\ [a,b] yaitu\ ada\ x_1, x_2 \epsilon\ [a,b] dengan\ f(x_1) = m\ , f(x_2) = m\ dan\ m = f(x_1) \leq f(x_2)\ dan\ f(x) \leq f(x_2) = m\ untuk\ setiap\ x \in [a,b]$

Teorema : Jika f mempunyai min atau maks local di titik c ϵ D dan f' ada, maka f' (c) =0

cara mencari nilai ekstrim pada fungsi kontinu pada interval tertutup berhingga:

1. hitung semua nilai pada titik ujung dan titik kritis
2. tentukan nilai terbesar dan yang terkecil

Contoh :

$g(t) = 4t - t^2$; $t \in [-1,2]$ Tentukan nilai ekstrim fungsi g!

Jawab :

a. titik – titik ujung adalah t= – 1 dan t=2

   t= – 1 ; g(– 1)=– 5

   t= 2 ; g(2)= 4

b. titik kritis

   $g'(t) = 4 - 2t$

$$g'(t) = 0\ \rightarrow 4 - 2t = 0\ \rightarrow t = 2$$

$$\therefore nilai\ minimum\ \{-5,4\} adalah - 5,\ \ nilai\ maksimum\ \{-5,4\} adalah\ 4$$

📖 **Definisi :**

1. Fungsi f dikatakan fungsi naik pada interval I jika $f(x_1) < f(x_2)$ untuk $x_1<x_2$; x_1 $x_2 \in I$
2. Fungsi f dikatakan fungsi turun pada interval I jika $f(x_1)>f(x_2)$ untuk $x_1>x_2$; $x_1 x_2 \epsilon$ I
3. f naik atau f turun disebut fungsi monoton

teorema : Andaikan f kontinu pa [a,b] dan diferensiabel pada (a,b) maka

1. Jika $f'(x)>0$, $x\in(a,b)$, maka f naik pada (a,b)
2. Jika $f'(x)<0$, $x\in(a,b)$, maka f turun pada (a,b)

Contoh :

Gunakan uji turunan pertama untuk menentukan interval dimana f naik atau turun.

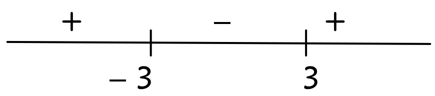
$$f(x) = x^3 - 27x + 2$$

Jawab :

$$f^{'}(x) = 3x^2 - 27$$

$$f^{'}(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 27 = 0 \rightarrow x = \pm 3$$

Uji tanda interval



$$f'(x) > 0 \; jika \; x < -3 \; atau \; x > 3 \rightarrow \; (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$$

$$f'9x) < 0 \; jika -3 < x < 3 \quad \rightarrow \; (-3{,}3)$$

Jadi, f naik pada interval $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$

f turun pada interval (– 3, 3)

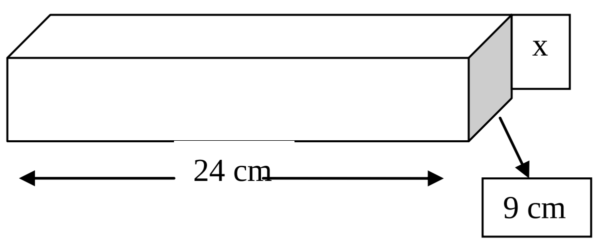
⌘ **Teorema Uji Turunan Kedua** : misal y=f(x) fungsi yang diferensiabel tingkat 2 pada interval I,

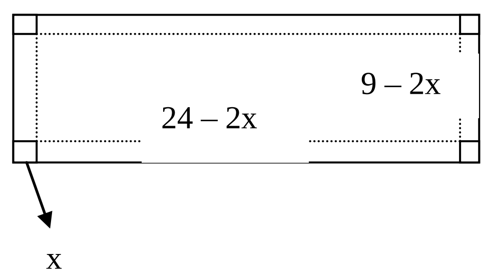
1. Jika f'(c)=0 dan f''(c)<0, maka f mempunyai maksimum local di x=c
2. Jika f'(c) =0 dan f''(c)>0, maka f mempunyai minimum local di x=c
3. Jika f'(c)=0 dan f''(c)=0, maka f mempunyai titik belok di x=c

🕮 Terapan Masalah Optimasi (Applied Optimization Problems)

- Menentukan nilai x
- Menentukan fungsi optimasi
- Kendala / batasan / domain fungsi
- Pengujian dilakukan pada titik kritis :
  a. Titik – titik ujung interval
  b. Titik dimana fungsi optimasi = 0

Soal !





Carilah ukuran kotak yang volumenya maksimum. Berapakah volume kotak ini ?

✶ Fungsi optimasi : $V(x) = p.l.t$

✶ Kendala / batasan / Domain Fungsi

$$p = 24 - 2x \quad ; \quad l = 9 - 2x \;\; ; t = x$$

$$p, l, t \geq 0$$

$$p = 24 - 2x \geq 0 \rightarrow x \leq 12$$

$$l = 9 - 2x \geq 0 \;\rightarrow x \leq 4{,}5$$

$$t = x \geq 0$$

Sehingga domain fungsinya $0 \leq x \leq 4{,}5$

$$V(x) = (24 - 2x)(9 - 2x)x$$

$$= (24 - 2x)(9x - 2x^2)$$

✶ Pengujian dilakukan pada titik kritis :

a. Titik – titik ujung interval

   x=0 ; V(x)=0

   x=6 ; V(x)=0

b. Titik dimana V'(x)=0

$$V(x) = (24 - 2x)(9x - 2x^2)$$

$$\frac{dv}{du} = v\,du + u\,dv$$

$$0 = \; -2(9x - 2x^2) + (24 - 2x)(9 - 4x)$$

$$0 = (-18x + 4x^2) + (216 - 114x + 8x^2)$$

$$0 = 12x^2 - 132x + 216$$

$$0 = 12(18 - 11x + x^2)$$

$$0 = 12(9 - x)(2 - x)$$

$$x = 9 \; atau \; x = 2$$

   syarat interval yaitu $0 \leq x \leq 4{,}5$. Sehingga, nilai x yang kita ambil hanyalah x=2 karena masuk dalam selang interval tadi.

   x=2 ; V(2)= 200

   jadi, Volume maksimum kotak 200 cm^3 dengan panjang=20 cm, lebar= 5cm dan tinggi 2 cm

📖 **Teorema De L'Hopital : Andaikan f(a)=g(a)=0**

f'(a),g(a) ada dan g'(a)≠0

Maka : $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$

Soal !

Tentukan harga Limit – Limit berikut !

1. $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}$
   (bentuknya $\frac{0}{0}$, oleh karena itu kita turunkan hingga bentuknya tidak mencapai $\frac{0}{0}$)
$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}=\frac{1}{4}$$

2. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=5\lim_{5x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=5.1=5$

3. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{4x^3-x-3}$ (karena bentuknya $\frac{0}{0}$, kita harus menurunkan hingga tidak $\frac{0}{0}$)
$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2}{12x^2-1}=\frac{3}{11}$$

4. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ (*karena bentuknya* $\frac{0}{0}$, *maka kita harus menurunkannya hingga tidak* $\frac{0}{0}$)

Masih 0/0
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$$

5. $\lim_{x\to 0}\frac{x(\cos x-1)}{\sin x-x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x+\cos x-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\cos x-2\sin x}{-\sin x}=$
   $\lim_{x\to 0}-\frac{x\cos x+2\sin x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x+3\cos x}{\cos x}=\frac{3}{1}=3$ (sama seperti yang di atas)

📖 **Fungsi Transenden**

✶ Fungsi Pangkat

Teorema : bilangan Euler yaitu y=e^x → $\frac{dy}{dx}=e^x$

Secara umum: jika y=e^u, maka $\frac{dy}{dx}$= e^u $\frac{du}{dx}$

Contoh :

$$Tentukan\ \frac{dy}{dx}\ dari:$$

1. $y = e^{(12x+5)}$

   Jawab : Misal u=12x+5, maka $\frac{du}{dx}$=12

$$y = e^u$$

$$\frac{dy}{dx} = e^u . \frac{du}{dx} = e^{(12x+5)} . 12 = 12e^{(12x+5)}$$

2. $y = e^{\cos x}$

$$jawab:\ \ Misal\ u = \cos x,\ \ \frac{du}{dx} = -\sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = e^u . \frac{du}{dx} = e^{\cos x} . -\sin x = -\sin x \, . \, e^{\cos x}$$

🕮 Fungsi Logaritma

Definisi : a^b=c jika dan hanya jika $^a\log c$=b

Jika a=e=bilangan euler, maka

$^e\log x$=Lnx (Ln = Logaritma natural / napier)

- **Sifat – Sifat Logaritma :**
  1. $^a\log (bc) = {^a\log b} + {^a\log c}$
  2. $^a\log b^c = c\ {^a\log b}$
  3. $^a\log b = \frac{\log b}{\log a}$
  4. $a^{^a\log x}$=x

- **Teorema** : Misal y= Ln x, maka y'=$\frac{1}{x}$

  Secara umum : jika y= Ln x, maka $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} . \frac{du}{dx}$

Contoh :

$$y = (Ln\ x)^2 . Tentukan\ y'!$$

Jawab :

Misal , $Ln\ x = u$, $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$

$$y = u^2 \quad sehingga \quad \frac{dy}{du} = 2u$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = 2u.\frac{1}{x} = 2(Ln\ x).\frac{1}{x} = \frac{2\ (Ln\ x)}{x}$$